Examen final de Análisis de Variable Compleja.
Cuarto curso de Matemáticas.
17 de Junio de 1997.

1.- Sean $a,b\in\mathbb{C}$, $a\neq b$, y sea Ω el dominio obtenido al suprimir del plano complejo el segmento que une los puntos a y b.

a) Probar que la función $f:\Omega\to\mathbb{C}$ definida para todo $z\in\Omega$ por

$$f(z)=\log\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$$

es holomorfa en Ω. Deducir que para todo camino cerrado γ en Ω se tiene que

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a}=\int_\gamma \frac{dz}{z-b}.$$

b) Obtener, para el caso en que $a=1$, $b=i$, el desarrollo en serie de potencias de f centrado en cero y calcular el radio de convergencia de la serie y el radio del más grande disco donde dicho desarrollo es válido.

2.- Integrando una conveniente función compleja a lo largo de la frontera del sector circular $\left\{z\in\mathbb{C}^*:|z|<R,\ 0<\arg(z)<\frac{2\pi}{3}\right\}$, con $R>0$ suficientemente grande, calcular la integral

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^3+a^3}\qquad (a>0).$$

3.- Determinar el número de ceros del polinomio

$$z^8-4z^5+z^2-2$$

a) En el anillo $A(0;1,2)$.
b) En el semiplano de la derecha.

4.- Construir un isomorfismo conforme del dominio

$$\Omega=\left\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}(z)<0,\ \left|z-\frac{1-i}{2}\right|>\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

sobre el disco unidad abierto.

5.- Pruébese que una función f que es meromorfa en $\mathbb{C}$ e inyectiva es una transformación de Möbius.